49^0 ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΘΗΝΩΝ **ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2011-2012**

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 29 ΜΑΪΟΥ 2012

ΘΕΩΡΙΑ 1η : Α)Να αποδείξετε την ταυτότητα : $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\cdot\alpha\cdot\beta + \beta^2$

Β)Να μεταφέρετε στο γραπτό σας τις παρακάτω ισότητες τις οποίες και να συμπληρώσετε .

I. $(\alpha + \beta)^2$ = ……
II. $(\alpha - \beta)^3$ = ……
III. $(\alpha - \beta)\cdot(\alpha + \beta)$ = ……

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Α) $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta) = \boldsymbol{\alpha^2 - \alpha\cdot\beta - \beta\cdot\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\cdot\alpha\cdot\beta + \beta^2}$

I. $(\alpha+\beta)^2 = \boldsymbol{\alpha^2 + 2\cdot\alpha\cdot\beta + \beta^2}$

Β) II. $(\alpha - \beta)^3 = \boldsymbol{\alpha^3 - 3\cdot\alpha^2\cdot\beta + 3\cdot\alpha\cdot\beta^2 - \beta^3}$

III. $(\alpha - \beta)\cdot(\alpha+\beta) = \boldsymbol{\alpha^2 - \beta^2}$

ΘΕΩΡΙΑ 2η : Α)Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας δύο τυχαίων τριγώνων και να κάνετε τα αντίστοιχα σχήματα .

Β) Να χαρακτηρίσετε στο γραπτό σας τις παρακάτω προτάσεις με το γράμμα Σ αν είναι σωστές ή με το γράμμα Λ αν είναι λανθασμένες

I. Αν δυο ορθογώνια τρίγωνα έχουν ίσες υποτείνουσες είναι ίσα .

II. Αν δυο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία ,τότε είναι ίσα .

III. Αν δυο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία είναι ίσα

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Α) Θεωρία Σχολικό Βιβλίο σελίδες **188** και **189**

. I. **Λάθος**

Β) II. **Λάθος**

III. **Σωστό**

ΑΣΚΗΣΗ 1η : Δίνεται η εξίσωση : $\frac{1}{x-2}+\frac{x+2}{1-x}=\frac{2\cdot x+1}{x^2-3\cdot x+2}$

Α)Να παραγοντοποιήσετε το $x^2-3\cdot x+2$.

Β) Να βρείτε το Ε.Κ.Π των παρονομαστών .

Γ)Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Α) $x^2-3\cdot x+2$ = **(x-1)·(x-2)**

αλλάζουμε το πρόσημο μπροστά από το δεύτερο κλάσμα με αντίστοιχο παρονομαστή το x-1

Β) $\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x-1}=\frac{2\cdot x+1}{(x-1)\cdot(x-2)}$. Άρα το Ε.Κ.Π των παρονομαστών είναι : **(x-2)·(x-1)**

Γ) Θέτουμε Ε.Κ.Π ≠0 όποτε (x-1)·(x-2)≠0 $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1\neq 0 \\ \text{και} \\ x-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x\neq 1} \\ \mathbf{\text{και}} \\ \mathbf{x\neq 2} \end{cases}$

Στη συνέχεια κάνουμε απαλοιφή των παρονομαστών οπότε έχουμε :

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}-(x-1)\cdot(x-2)\cdot\frac{x+2}{x-1}=(x-1)\cdot(x-2)\cdot\frac{2\cdot x+1}{(x-1)\cdot(x-2)}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ (x-1)·1 – (x-2)·(x+2) =2·x+1 $\Leftrightarrow$ x – 1- (x^2 -4) =2·x+1 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ x – 1- x^2 +4 =2·x+1$\Leftrightarrow$ ..... $\Leftrightarrow$ **x^2 +x -2 =0** .

Βρίσκουμε **Διακρίνουσα =9** οπότε **x_1 = -2** δεκτή και **x_2 =1** απορρίπτεται λόγω περιορισμών

ΑΣΚΗΣΗ 2 η Δίνεται **το** σύστημα : $\begin{cases} x + 3 \cdot \psi = 5 \\ 2 \cdot x - 3 \cdot \psi = 1 \end{cases}$

A) Να λύσετε το σύστημα.

B) Να εξετάσετε , αν η λύση του παραπάνω συστήματος αποτελεί και λύση του

συστήματος : $\begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{\psi+1}{2} = 0 \\ 3 \cdot x - 5 \cdot \psi = 1 \end{cases}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

A) $\begin{cases} x + 3\psi = 5 & (1) \\ 2x - 3\psi = 1 & (2) \end{cases}$ Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις και έχουμε: 3x =6 ⟺ **x=2.**

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1) όπου x=2 και έχουμε 2+3ψ=5 ⟺..... ⟺ **ψ=1.**

B) Λύνουμε το δεύτερο σύστημα με τον ίδιο τρόπο κάνοντας στην αρχή πράξεις .

$\begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{\psi+1}{2} = 0 & (1) \\ 3x - 5\psi = 1 & (2) \end{cases}$ Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών στην εξίσωση (1)

$\begin{cases} 2(x+1) - 3(\psi+1) = 0 \\ 3x - 5\psi = 1 \end{cases}$ ⟺ ..... ⟺ $\begin{cases} 2x - 3\psi = 1 \\ 3x - 5\psi = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \cdot 3 \\ \cdot (-2) \end{cases}$ ⟺

$\begin{cases} 6x - 9\psi = 3 \\ -6x + 10\psi = -2 \end{cases}$ Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε ότι **ψ=1 .**

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση 2x -3ψ =1 όπου ψ=1 και βρίσκουμε ότι **x=2** .

Άρα η λύση του συστήματος του ερωτήματος A) αποτελεί και λύση του συστήματος του B) ερωτήματος .

Σημείωση : Θα μπορούσαμε αντί να λύσουμε το σύστημα του ερωτήματος B) να αντικαταστήσουμε τις τιμές των x και ψ που βρήκαμε στο A) ερώτημα στο σύστημα του B) ερωτήματος και να διαπιστώσουμε ότι επαληθεύονται οι εξισώσεις του .

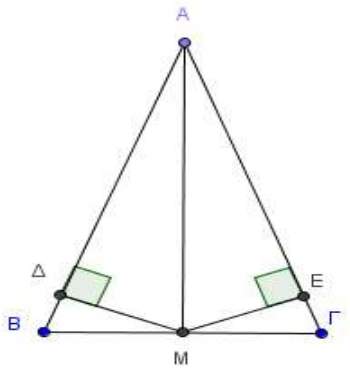
ΑΣΚΗΣΗ 3 η : Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και έστω Μ το μέσο της ΒΓ

Φέρνουμε από το Μ τα τμήματα ΜΔ και ΜΕ κάθετα στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα . Να αποδείξετε ότι :

Α) ΜΔ = ΜΕ

Β) $A\widehat{M}\Delta = A\widehat{M}E$

Γ) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ .

α) Είναι ορθογώνια ($\widehat{\Delta} = \widehat{E} = 90^0$)

β) ΒΜ = ΜΓ (Μ μέσο της ΒΓ)

γ) $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ (ΑΒΓ τρίγωνο ισοσκελές)

Άρα τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα μεταξύ τους οπότε ΜΔ=ΜΕ .

Β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΑΕΜ .

α) Είναι ορθογώνια ($\widehat{\Delta} = \widehat{E} = 90^0$)

β) ΔΜ = ΕΜ (από ερώτημα Α)

γ) ΑΜ = ΑΜ (κοινή πλευρά)

Άρα τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΑΕΜ είναι ίσα μεταξύ τους οπότε $A\widehat{M}\Delta = A\widehat{M}E$.

Γ) Από την προηγούμενη σύγκριση έχουμε επίσης ότι $\Delta\widehat{A}M = E\widehat{A}M$ οπότε η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.

Σημείωση : Το ερώτημα Γ) αποτελεί και βασική εφαρμογή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας .

ΣΕ ΚΑΘΕ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ Η ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΤΗΣ ΚΟΡΥΦΗΣ ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ ΥΨΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΜΕΣΟΣ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ .

Τις λύσεις επιμελήθηκε η ομάδα των Μαθηματικών του 49ου Γυμνασίου Αθηνών .

Οικονομόπουλος Θεόδωρος, Κουρεμπανάς Γεώργιος, Δούκας Εμμανουήλ