



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
72<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
19 Νοεμβρίου 2011

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left( \frac{2}{7} + 1 - \frac{1}{14} \right) : \frac{17}{2} - \frac{1}{7} + 5 \frac{1}{6} - \left( \frac{3}{2} + \frac{7}{3} \cdot 2 - 1 \right).$$

**Πρόβλημα 2**

Αν ο  $\nu$  είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα  $\frac{10}{\nu}$  παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

$$B = \frac{2}{\nu - \frac{1}{5}} : \frac{\nu - \frac{\nu}{2}}{9}.$$

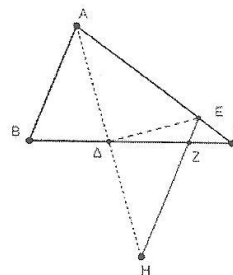
**Πρόβλημα 3**

Τρεις αριθμοί  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3, 9, 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό  $\gamma$  ως μειωτέο και τον αριθμό  $\alpha$  ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ .

**Πρόβλημα 4**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και η διχοτόμος του  $A\Delta$ . Προεκτείνουμε τη διχοτόμο  $A\Delta$  κατά το ευθύγραμμο τμήμα  $\Delta H$  έτσι ώστε  $A\Delta = \Delta H$ . Από το σημείο  $H$  φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά  $AB$  που τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$  και την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $Z$ .

1. Να αποδείξετε ότι:  $\hat{A}\hat{E} = 90^\circ$ .
2. Να βρείτε τη γωνία  $\hat{E}\hat{Z}$ , αν γνωρίζετε ότι:  $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 20^\circ$ .



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες  
Καλή επιτυχία!





ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
72<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
19 Νοεμβρίου 2011

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν  $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$ ,  $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$  και  $\gamma = 10^{-1} \cdot 1000$  να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left( \frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \quad \text{και} \quad \frac{x-3}{2} - \frac{2x-9}{8} \leq x.$$

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  δίνεται ότι η ευθεία  $(\varepsilon)$  με εξίσωση  $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$ , όπου  $\lambda, \mu$  πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία  $(\delta)$  με εξίσωση  $y = 2\lambda x$  και περνάει από το σημείο  $K(2, 8)$ .

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\lambda$  και  $\mu$ .

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία  $\Lambda(-4, -4)$  και  $M(-1, 2)$  ανήκουν στην ευθεία  $(\varepsilon)$  και να αποδείξετε ότι το σημείο  $M$  είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος  $K\Lambda$ .

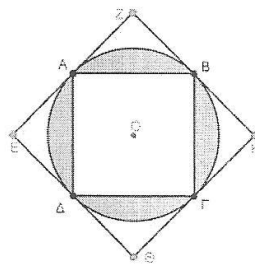
Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα  $AB\Gamma\Delta$  και  $EZH\Theta$  είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο  $EZH\Theta$  έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου  $C(O, \rho)$  στα σημεία  $A, B, \Gamma$  και  $\Delta$ .

(α) Να βρείτε το άθροισμα  $\Sigma_1$  των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου  $C(O, \rho)$  και εξωτερικά του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ .

(β) Να βρείτε το άθροισμα  $\Sigma_2$  των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου  $EZH\Theta$  και εξωτερικά του κύκλου  $C(O, \rho)$ .

(γ) Να αποδείξετε ότι  $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3}$ . (Θεωρείστε ότι  $\pi = 3,1415$ ).



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1.  $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3} = 10^{-1-(-3)} = 10^{-1+3} = 10^2 = 100$   
 $\beta = 10^5 : 10^7 = 10^{5-7} = 10^{-2} = \frac{1}{100}$   
 $\gamma = 10^1 \cdot 1000 = 10^1 \cdot 10^3 = 10^{1+3} = 10^4 = 10000$

ή β. πρόσημα:  $\alpha = \beta = \gamma = 100$  άρα  $A = \left(\frac{6 \cdot 100}{3 \cdot 100}\right)^{-2} = (2)^{-2} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow A = \left(\frac{6 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100}{100 \cdot 100 + 100 \cdot 100 + 100 \cdot 100}\right)^{-2} = \left(\frac{6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^4}\right)^{-2} = (2 \cdot 10^2)^{-2} = 2^{-2} \cdot 10^{-4} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{10^4} = \frac{1}{4 \cdot 10000} = \frac{1}{40000}$

2.  $\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2$   $\frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}(x-5)}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x$ ,  $\frac{x-6}{8} - \frac{2x-9}{8} \leq x$

4.  $\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 4 \cdot 2$   $8 \cdot \frac{x-6}{8} - 8 \cdot \frac{2x-9}{8} \leq 8x$

$2x - (x-5) \leq 8$   $x-6 - (2x-9) \leq 8x$

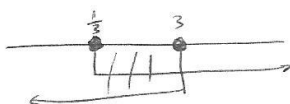
$2x - x + 5 \leq 8$   $x-6-2x+9 \leq 8x$

$x \leq 8-5$   $x-2x-8x \leq -9+6$

$x \leq 3$   $-9x \leq -3$

$x \geq \frac{1}{3}$

Κοινές λύσεις

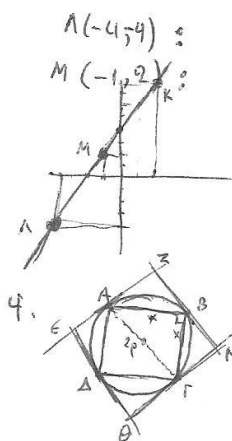


$\frac{1}{3} \leq x \leq 3$  }  $\Rightarrow x = 1, 2, 3$   
 x ακέραιος

3. α)  $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$  (ε) }  $\xrightarrow{(ε) \parallel (δ)}$   $3\lambda - 1 = 2\lambda \Rightarrow 3\lambda - 2\lambda = 1, \lambda = 1$   
 $y = 2\lambda x, (δ)$

20 Κ (2, 8) ανήκει στην (ε) άρα  $8 = (3 \cdot 1 - 1) \cdot 2 + 2\mu, 8 = 2 \cdot 2 + 2\mu, 2\mu = 8 - 4, 2\mu = 4$

β) άρα α (ε):  $y = (3 \cdot 1 - 1)x + 2 \cdot 2 \Rightarrow y = 2x + 4$   $\mu = \frac{4}{2}, \mu = 2$



$A(-4, 4): -4 = 2 \cdot (-4) + 4 \Rightarrow -4 = -8 + 4 \Rightarrow -4 = -4$  (α)  $x \in C_1$   
 $M(-1, 2): 2 = 2 \cdot (-1) + 4 \Rightarrow 2 = -2 + 4 \Rightarrow 2 = 2$  (β)  $x \in C_1$

$(KM) = \sqrt{[2-(-1)]^2 + [8-2]^2} = \sqrt{(2+1)^2 + 6^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$   
 $(MN) = \sqrt{[-1-(-4)]^2 + [2-4]^2} = \sqrt{(-1+4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$

$\Rightarrow (KM) = (MN)$ , άρα 20 Μ μισό του ΚΑ.

Α Β Γ ορθογ. ηυδρ.  $x^2 + x = (2\rho)^2, 2x^2 = 4\rho^2, x^2 = 2\rho^2, x = \rho\sqrt{2}$

$\Sigma_{ΑΒΓΔ} = x^2 = 2\rho^2$  }  $\Rightarrow \Sigma_1 = \pi\rho^2 - 2\rho^2 = \rho^2(\pi - 2)$  (α)  
 $\Sigma_{ΚΜΝΖ} = \pi\rho^2$  }  
 $\Sigma_{ΕΖΗΘ} = (2\rho)^2 = 4\rho^2$  }  $\Rightarrow \Sigma_2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = \rho^2(4 - \pi)$  (β)

β)  $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3}, \frac{\rho^2(\pi-2)}{\rho^2(4-\pi)} < \frac{4}{3}, 3(\pi-2) < 4(4-\pi), 3\pi-6 < 16-4\pi, 3\pi+4\pi < 16+6, 7\pi < 22, \pi < \frac{22}{7} \approx 3,1428$  (α) αληθές