ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ :

1. $A = \dfrac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4 \cdot 2^4 - 3^4 + x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0} = \dfrac{\left(-\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\right)^4 - 3^4 + x}{\left[1-(-1)\right]^0} = \dfrac{(-3)^4 - 3^4 + x}{(1+1)^0} = \dfrac{\cancel{3^4} - \cancel{3^4} + x}{2^0} = \dfrac{x}{1} = x$

$B = \dfrac{\left[(-2)^2 + (-1)^2\right]^2}{5} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{(4+1)^2}{5} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{5^{\cancel{2}}}{\cancel{5}} + \dfrac{x}{2} = 5 + \dfrac{x}{2}$

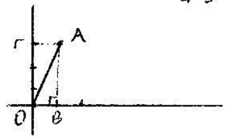
και επειδή $A = B$, $x = 5 + \dfrac{x}{2}$

$2x = 10 + x$, $2x - x = 10$, $\boxed{x = 10}$

2. α. Επειδή το Α ανήκει στο 1^o τεταρτημόριο, έχουμε: $-\lambda + 2 > 0$, $2 > \lambda$, $\lambda < 2$; $4\lambda - 1 > 0$, $4\lambda > 1$, $\lambda > \frac{1}{4}$ δηλ. $\frac{1}{4} < \lambda < 2$, λ ακέραιος

Επομένως $\boxed{\lambda = 1}$

β. για $\lambda = 1$ έχουμε: $A(-1+2, 4.1-1) = A(1, 3)$



$O\hat{B}A \xRightarrow[\text{πυθαγ.}]{\text{ορθογ.}} OA^2 = OB^2 + AB^2 = 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$, $OA = \sqrt{10}$ μ.

γ. $(OBA\Gamma) = 1.3 = 3$ τ.μ. ($OBA\Gamma$ ορθογώνιο)

3. Τα ημικύκλια με διαμέτρους ΑΔ και ΒΓ μας κάνουν ένα κύκλο διαμέτρου 2α δηλ. ακτίνας α, άρα $E_1 = \pi\alpha^2$

Τα ημικύκλια με διαμέτρους ΑΒ και ΔΓ μας κάνουν ένα κύκλο διαμέτρου α δηλ. ακτίνας $\frac{\alpha}{2}$, άρα $E_2 = \pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\pi\alpha^2}{4}$

Το ΑΒΓΔ έχει εμβαδό $E_3 = \alpha . 2\alpha = 2\alpha^2$

Ο εξωτερικός κύκλος έχει ακτίνα $\alpha + \frac{\alpha}{2} = \frac{3\alpha}{2}$, άρα έχει εμβαδό $E_4 = \pi.\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2 = \frac{9\pi\alpha^2}{4}$

άρα το εμβαδό του χωρίου που είναι εκτός του εξωτερικού κύκλου και εκτός των εσωτερικών ημικυκλίων είναι: $E = E_4 - E_1 - E_2 - E_3 = \frac{9\pi\alpha^2}{4} - \pi\alpha^2 - \frac{\pi\alpha^2}{4} - 2\alpha^2 =$

$= \dfrac{9\pi\alpha^2 - 4\pi\alpha^2 - \pi\alpha^2 - 8\alpha^2}{4} = \dfrac{4\pi\alpha^2 - 8\alpha^2}{4} = \dfrac{\cancel{4}\alpha^2(\pi-2)}{\cancel{4}} = \alpha^2(\pi - 2)$

4. $\dfrac{45^\nu . 2^{2\nu}}{6^\nu} = 900$, $\dfrac{45^\nu . (2^2)^\nu}{6^\nu} = 900$, $\dfrac{\left[45.2^2\right]^\nu}{6^\nu} = 900$, $\left(\dfrac{4.45}{6}\right)^\nu = 900$, $30^\nu = 30^2$, $\boxed{\nu = 2}$

$A = 2003.(-1)^\nu - (-1)^{\nu+1} + 4.(-1)^{\nu+2} = 2003.(-1)^2 - (-1)^{2+1} + 4.(-1)^{2+2} = 2003.1 - (-1)^3 + 4.1 =$

$= 2003 - (-1) + 4 = 2003 + 1 + 4 = 2008$.

5. $A = 4.(-1)^\nu + 2.\dfrac{(-1)^{2\nu+1}}{5} - 7.\dfrac{(-1)^{3\nu}}{5} = 4.(-1)^\nu + 2.\dfrac{\left[(-1)^2\right]^\nu.(-1)^1}{5} - 7\dfrac{\left[(-1)^3\right]^\nu}{5} = 4.(-1)^\nu - \dfrac{2}{5} - \dfrac{7.(-1)^\nu}{5}$

αν ν άρτιος τότε $A = 4.(+1) - \dfrac{2}{5} - \dfrac{7.(+1)}{5} = \dfrac{4}{1} - \dfrac{2}{5} - \dfrac{7}{5} = \dfrac{20-9}{5} = \dfrac{11}{5}$

αν ν περιττός τότε $A = 4.(-1) - \dfrac{2}{5} - \dfrac{7.(-1)}{5} = -4 - \dfrac{2}{5} + \dfrac{7}{5} = -4 + \dfrac{5}{5} = -4 + 1 = -3$.

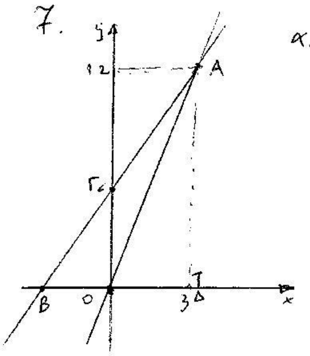
άρα αν ν άρτιος τότε $A = \dfrac{11}{5}$, ενώ αν ν περιττός τότε $A = -3$

6. $\begin{array}{c|l} \alpha & 5 \\ \hline 2 & \kappa \end{array}$ άρα $\alpha = 5\kappa + 2$

- για $\kappa = 0 \Rightarrow \alpha = 2$
- για $\kappa = 1 \Rightarrow \alpha = 7$
- για $\kappa = 2 \Rightarrow \alpha = 12$
- για $\kappa = 3 \Rightarrow \alpha = 17$
- για $\kappa = 4 \Rightarrow \alpha = 22$
- για $\kappa = 5 \Rightarrow \alpha = 27$

Παρατηρούμε ότι ο α ή θα τελειώνει σε 2 ή σε 7 αλλά επειδή είναι περιττός θα έχει τελευταίο ψηφίο το 7.

7.



α. ε_1: έχει κλίση 4 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα $\boxed{y=4x}$

ε_2: είναι // στην $y=2x$ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(0,6)$ άρα μορφή $y=2x+\beta$ επομένως $6=2\cdot 0+\beta \Rightarrow \beta=6$ δηλ. $\boxed{y=2x+6}$

το κοινό τους σημείο $\left.\begin{matrix} y=4x \\ y=2x+6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4x=2x+6,\ 2x=6,\ x=3 \Rightarrow y=4\cdot 3=12$

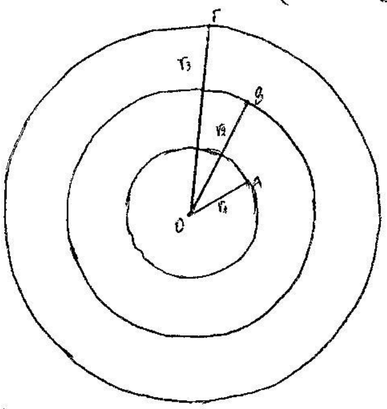
άρα $A(3,12)$

β. η ευθεία ε_2 τέμνει τον xx' όταν $y=0$ δηλ. $0=2x+6,\ -2x=6,\ \boxed{x=-3}$

άρα $B(-3,0)$.

$(AOB)=\dfrac{OB\cdot A\Delta}{2}=\dfrac{3\cdot \cancel{12}^{6}}{\cancel{2}_{1}}=18$ τ.μ.

8.



$\left.\begin{matrix} r_2-r_1=r_3-r_2 \\ r_3=3r_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow r_2-r_1=3r_1-r_2,\ 2r_2=4r_1,\ \boxed{r_2=2r_1}$ $\boxed{r_3=3r_1}$

$\dfrac{E(\Delta_1)}{E(\Delta_2)}=\dfrac{\pi r_2^2-\pi r_1^2}{\pi r_3^2-\pi r_2^2}=\dfrac{\pi(2r_1)^2-\pi r_1^2}{\pi(3r_1)^2-\pi(2r_1)^2}=\dfrac{4\pi r_1^2-\pi r_1^2}{9\pi r_1^2-4\pi r_1^2}=\dfrac{3\cancel{\pi r_1^2}}{5\cancel{\pi r_1^2}}=\dfrac{3}{5}$

9. $x+y=3\cdot(-2)^2=3\cdot 4=12,\quad y-w=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}=\left(-\frac{3}{5}\right)^{24}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{-24}=\left(-\frac{3}{5}\right)^{24-24}=\left(-\frac{3}{5}\right)^0=1.$

$A=7x+10y-3w-87=7x+7y+3y-3w-87=7(x+y)+3(y-w)-87=7\cdot 12+3\cdot 1-87=84+3-87=0$

10. Επειδή το ψηφίο των μονάδων είναι πολλαπλάσιο του 4, θα είναι 0 ή 4 ή 8

Επειδή το ψηφίο των δεκάδων είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων, θα είναι: 0 ή 2 ή 4.

Επειδή το ψηφίο των εκατοντάδων είναι διαιρέτης του 5, θα είναι 1 ή 5

Επειδή το ψηφίο των χιλιάδων είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων μειωμένο κατά 1, θα είναι 0 ή 4. Ο όμως αποκλείεται γιατί τότε θα ήταν τριψήφιος.

άρα ο αριθμός που ζητάμε θα είναι 4500 ή 4524 ή 4548

11. α. Επειδή $A\hat{\Delta}B=120^\circ$, θα είναι $A\hat{\Delta}E=180^\circ-120^\circ=60^\circ$, επομένως το $A\overset{\triangle}{\Delta}E$ έχει δύο γωνίες 60°, άρα θα είναι ισόπλευρο δηλ. $A\Delta=\Delta E=AE$.

β. $\left.\begin{matrix} B\hat{A}\Delta=B\hat{A}\Gamma-\Delta\hat{A}\Gamma=120^\circ-90^\circ=30^\circ \\ \Gamma\hat{A}E=\Gamma\hat{A}B-E\hat{A}B=120^\circ-90^\circ=30^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow B\hat{A}\Delta=\Gamma\hat{A}E=30^\circ.$

$\left.\begin{matrix} A\overset{\triangle}{\Delta}B \Rightarrow \hat{B}+120^\circ+30^\circ=180^\circ,\ \hat{B}=30^\circ \\ A\overset{\triangle}{E}\Gamma \Rightarrow \hat{\Gamma}+120^\circ+30^\circ=180^\circ,\ \hat{\Gamma}=30^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{B}=\hat{\Gamma}=30^\circ$, $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές.

γ. $A\overset{\triangle}{H}E$, ημ$60^\circ=\dfrac{AH}{AE}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{AE} \Rightarrow AE=4 \Rightarrow \Pi_{A\Delta E}=3\cdot 4=12$ μ.

$A\overset{\triangle}{H}B$, ημ$30^\circ=\dfrac{AH}{AB}$, $\dfrac{1}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{AB} \Rightarrow AB=4\sqrt{3}$, $A\Gamma=4\sqrt{3}$, $AE=E\Gamma=4$, $\Delta E=4$, $B\Gamma=B\Delta+\Delta E+E\Gamma=4+4+4=12$

$\Pi_{AB\Gamma}=4\sqrt{3}+4\sqrt{3}+12=8\sqrt{3}+12=4(2\sqrt{3}+3)$

άρα $\dfrac{\Pi_{AB\Gamma}}{\Pi_{A\Delta E}}=\dfrac{4(2\sqrt{3}+3)}{12}=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$

12. α. $O\overset{\triangle}{E}A \xrightarrow[\text{πυθαγ.}]{\text{ορθογ.}} OA^2 = OE^2 + EA^2 = \rho^2 + \rho^2 = 2\rho^2$,

$E_{\Delta(O,\rho,OA)} = \pi OA^2 - \pi\rho^2 = \pi(OA^2 - \rho^2) = \pi(2\rho^2 - \rho^2) = \pi\rho^2$

β. $E_{C(O,OA)} = \pi \cdot OA^2 = \pi 2\rho^2 = 2\pi\rho^2$, $E_{ΑΒΓΔ} = (2\rho)^2 = 4\rho^2$ άρα $E(x_1) = 2\pi\rho^2 - 4\rho^2 = 2\rho^2(\pi - 2)$ τ.μ.

$E_{C(O,\rho)} = \pi\rho^2$, άρα $E(x_2) = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = \rho^2(4 - \pi)$ τ.μ.

$\frac{E(x_1)}{E(x_2)} = \frac{2\cancel{\rho^2}(\pi-2)}{\cancel{\rho^2}(4-\pi)} = \frac{2\pi - 4}{4 - \pi} > \frac{13}{5}$, $10\pi - 20 > 52 - 13\pi$, $23\pi > 72$, $\pi > \frac{72}{23} \simeq 3,13$ ισχύει.

γ. πρέπει $E_{\Delta(O,x,\rho)} = \frac{E_{\Delta(O,\rho,OA)}}{2}$, $\pi x^2 - \pi\rho^2 = \frac{\pi\rho^2}{2} \Rightarrow \pi x^2 = \pi\rho^2 + \frac{\pi\rho^2}{2} \Rightarrow \pi x^2 = \frac{3\pi\rho^2}{2}$,

$x^2 = \frac{3\cancel{\pi}\rho^2}{2\cancel{\pi}}$, $\boxed{x = \rho\sqrt{\frac{3}{2}}\ \mu.}$

13. $A = -\left[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2\right] : (-2)^4 = -\left[(-2)^8 : (-2^2)^2 + 16\right] : (+16) = -\left[2^8 : 2^4 + 16\right] : 16 =$

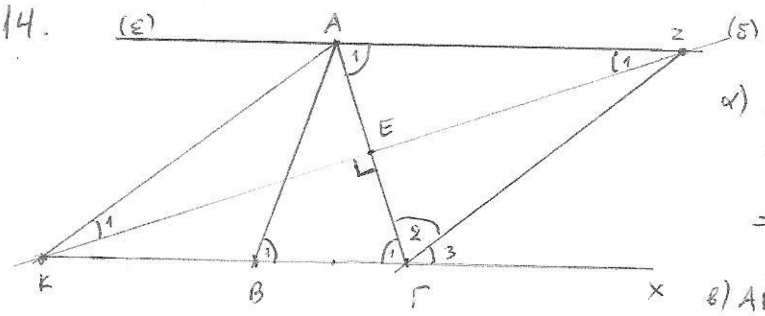
$= -(2^4 + 16) : 16 = -(16 + 16) : 16 = -32 : 16 = -2$

$B = -(x-3) - 3(y-4) - \left[x(y-2) - y(x+3)\right] = -x + 3 - 3y + 12 - (\cancel{xy} - 2x - \cancel{xy} - 3y) = -x + 3 - \cancel{3y} + 12 + 2x + \cancel{3y} =$

$= x + 15$

$A > B$, $-2 > x + 15$, $x < -2 - 15$, $\boxed{x < -17}$

14.



α) $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισοσκ. $\hat{A} = 40°$ $\Big\} \Rightarrow Γ_1 = Β_1 = 70°$, $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{Γ}_1 = 70°$, $\overset{\triangle}{AZΓ}$ ισοσκ. $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{Γ}_2 = 70°$, $\Rightarrow \hat{Γ}_3 = 40°$ δηλ. $Z\hat{Γ}x = 40°$.

β) $\overset{\triangle}{AKΓ}$ ισοσκ. KE μεσο$\perp$ΑΓ $\Rightarrow$ KE διχ. $\Rightarrow \hat{K}_1 = 20°$

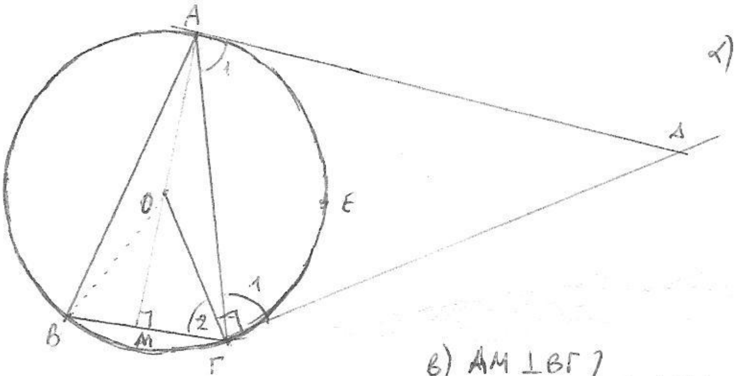
$\overset{\triangle}{AEZ} \xrightarrow{\text{ορθογ.}}$, $\hat{A}_1 = 70°$ $\Big\}$ $\hat{Z}_1 = 20°$ άρα $\hat{K}_1 = \hat{Z}_1 \Rightarrow \overset{\triangle}{KAZ}$ ισοσκελές $\Rightarrow \boxed{AK = AZ}$

15. α) Όλοι οι φυσικοί αριθμοί τελειώνουν σε 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, επομένως και τα τετράγωνά τους θα τελειώνουν σε 0, 1, 4, 9, 6, 5

β) A = αααbb, πρέπει $3α + 2b =$ πολ.9 $\Rightarrow$
- για $b = 1 \Rightarrow 3α + 2$ δεν είναι πολ. 9
- για $b = 3 \Rightarrow 3α + 6$ -//- -//-
- για $b = 5 \Rightarrow 3α + 10$ -//- -//-
- για $b = 7 \Rightarrow 3α + 14$ -//- -//-
- για $b = 9 \Rightarrow 3α + 18 =$ πολ.9 αν $α = 3, 6, 9$

άρα ο αριθμός είναι 3339 ή 6669 ή 9999 αλλά κανένας απ' αυτούς δεν είναι τετράγωνο φυσικού. Άρα δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός.

16.



α) $\hat{BO\Gamma} = 2\cdot\hat{BA\Gamma} = 2\cdot 30^\circ = 60^\circ$, $\overset{\triangle}{BO\Gamma}$ ισοσκ. $\Big\} \Rightarrow \overset{\triangle}{OB\Gamma}$ ισόπλευρο, $\Gamma_2 = 60^\circ$

$\Rightarrow O\Gamma = B\Gamma = \alpha$

$\hat{AO\Gamma} = 2\cdot\hat{AB\Gamma} = 2\cdot 75^\circ = 150^\circ$

$$E_{\kappa.\tau o\mu} = \frac{\pi\cdot O\Gamma^2\cdot\mu^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi\cdot\alpha^2\cdot 150^\circ}{360^\circ} = \frac{5\pi\alpha^2}{12}$$

β) $AM \perp B\Gamma$, $A\Delta \parallel B\Gamma \Big\} \Rightarrow AM \perp A\Delta \Rightarrow \hat{A}_1 = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$

$O\Gamma \perp \Gamma\Delta \Rightarrow \hat{\Gamma}_1 = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$ $\Big\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 \Rightarrow \overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$ ισοσκελές.

γ) $\overset{\triangle}{OM\Gamma} \underset{\text{πυθ.}}{\overset{\text{ορθογ.}}{\Longrightarrow}} OM^2 + M\Gamma^2 = O\Gamma^2$, $OM^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2$, $OM^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4}$, $OM^2 = \frac{3\alpha^2}{4}$, $OM = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

$AM = AO + OM = \alpha + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{2\alpha + \alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{(2+\sqrt{3})\alpha}{2}$

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}AM\cdot B\Gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2+\sqrt{3})\alpha}{2}\cdot\alpha = \frac{(2+\sqrt{3})\alpha^2}{4}$

17. $K = -3\left[2(\alpha+2\beta) - 2(3\beta-2\alpha) - 4\beta\right] + 19(\alpha-\beta) = -3(2\alpha+4\beta-6\beta+4\alpha-4\beta) + 19\alpha - 19\beta =$
$= -6\alpha - \cancel{12\beta} + 18\beta - 12\alpha + \cancel{12\beta} + 19\alpha - 19\beta = \alpha - \beta = 2005$

18. $2005\cdot K = 2001\cdot\lambda + 12$, το β' μέλος είναι πολλαπλάσιο του 3, άρα το K πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 3, και το μικρότερο είναι αν $K=3$ δηλ. $\underline{2005\cdot 3 = 6015}$

19. Αν x ο αριθμός τότε $\frac{33}{100}\cdot x = \alpha$ και $\frac{15}{100}\cdot x = \beta \Big\} \overset{(:)}{\Longrightarrow} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{33}{\cancel{100}}\cdot\cancel{x}}{\frac{15}{\cancel{100}}\cdot\cancel{x}} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cancel{33}^{11}}{\cancel{15}_5} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{11}{5} \Rightarrow$

$5\alpha = 11\beta$, ο 5 διαιρεί το β και η μικρότερη τιμή του β είναι 5
επομένως $\frac{15}{100}\cdot x = 5 \Rightarrow x = \frac{\cancel{5}^1\cdot 100}{\cancel{15}_3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{100}{3}}$

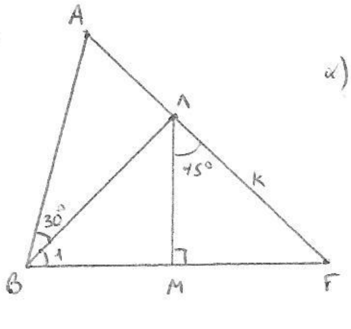
20. Όχι γιατί αν οι διαγώνιες ήταν ⊥ θα είχαμε τα δύο σημεία να συμπίπτουν άρα αδύνατο γιατί θέλουμε διαφορετικά σημεία.
Αν οι διαγώνιες δεν είναι ⊥, τότε θα είχαμε $\varphi+\varphi+\varphi+\varphi = 360^\circ \Rightarrow 4\hat{\varphi} = 360^\circ$
$\varphi = 90^\circ$ αδύνατο γιατί οι διαγώνιες δεν είναι ⊥.
Άρα δεν υπάρχουν τέτοια σημεία.

21. $A = \dfrac{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 5^2 - 3^2 + x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0} = \dfrac{\frac{3^2}{\cancel{5^2}}\cdot \cancel{5^2} - 9 + x}{1} = \cancel{9} - \cancel{9} + x = x$

$B = \dfrac{\left[(-2)^3 + (-1)^3\right]}{9} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{-8-1}{9} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{-9}{9} + \dfrac{x}{2} = -1 + \dfrac{x}{2}$

$A = 6B$, $x = 6\left(-1+\frac{x}{2}\right)$,
$x = -6 + 3x$, $x - 3x = -6$
$-2x = -6$, $\boxed{x = 3}$

22.



α) ΛΜ μεσο⊥ΒΓ, $\Rightarrow$ $\overset{\triangle}{Β Λ Γ}$ ισοσκελές $\Rightarrow$ ΒΛ = ΛΓ = κ
$\overset{\triangle}{ΛΜΓ} \xRightarrow{ορθογ.} \hat{Λ} = 45° \Rightarrow \boxed{\hat{Γ} = 45°}$
$\hat{B}_1 = \hat{Γ} = 45° \Rightarrow \hat{B} = 30° + 45° = 75°$ $\boxed{\hat{B} = 75°}$

$\hat{A} = 180° - (45° + 75°) = 180° - 120° = 60°$, $\boxed{\hat{A} = 60°}$

β) $\overset{\triangle}{ΑΛΒ} \xRightarrow{ορθογ.} συν30° = \dfrac{κ}{ΑΒ}$, $ΑΒ = \dfrac{κ}{συν30°}$, $ΑΒ = \dfrac{κ}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $ΑΒ = \dfrac{2κ}{\sqrt{3}}$, $\boxed{ΑΒ = \dfrac{2\sqrt{3}κ}{3} μ.}$

$\Rightarrow ημ30° = \dfrac{ΑΛ}{ΑΒ}$, $ΑΛ = ΑΒ \cdot ημ30°$, $ΑΛ = \dfrac{\cancel{2}\sqrt{3}κ}{3} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}}$, $\boxed{ΑΛ = \dfrac{\sqrt{3}\cdot κ}{3}}$

άρα $ΑΓ = ΑΛ + ΛΓ = \dfrac{\sqrt{3}κ}{3} + κ = \dfrac{\sqrt{3}κ + 3κ}{3} = \dfrac{κ(3+\sqrt{3})}{3} \Rightarrow \boxed{ΑΓ = \dfrac{κ(3+\sqrt{3})}{3} μ.}$

$\overset{\triangle}{ΛΜΓ} \xRightarrow{ορθογ.} ημ45° = \dfrac{ΜΓ}{κ}$, $ΜΓ = κ \cdot ημ45°$, $ΜΓ = κ \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow ΒΓ = 2ΜΓ = \cancel{2} \cdot \dfrac{κ\sqrt{2}}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{ΒΓ = κ\sqrt{2} μ.}$

γ) $(ΑΒΓ) = \dfrac{ΑΓ \cdot ΒΛ}{2} = \dfrac{\frac{κ(3+\sqrt{3})}{3} \cdot κ}{2} = \dfrac{(3+\sqrt{3})κ^2}{6}$ τ.μ.

23.

εργ.	ώρες	Μην.	έργο
20	8	6	1
20	8	2	x

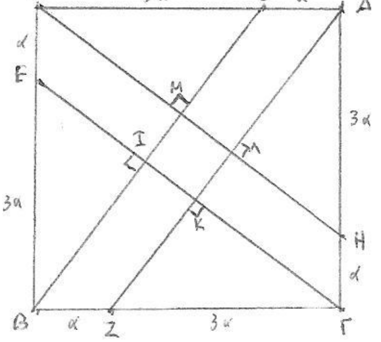
Ποσά ανάλογα άρα $\dfrac{2}{6} = \dfrac{x}{1} \Rightarrow x = \dfrac{2}{6}$, $x = \dfrac{1}{3}$ άρα οι 20 εργάτες σε 2 μήνες θα τελειώσουν το $\frac{1}{3}$ του μισού έργου. Επομένως οι ίδιοι εργάτες και οι πρόσθετοι θα έχουν να τελειώσουν τα $\frac{2}{3}$ του μισού έργου

Εργ.	ώρες	Μην	έργο
20	8	2	$\frac{1}{3}$
y	10	2	$\frac{2}{3}$

εργάτες - ώρες ποσά αντιστρόφως ανάλογα
εργάτες - έργο ποσά ανάλογα

$\Rightarrow y = 2\cancel{0} \cdot \dfrac{8}{1\cancel{0}} \cdot \dfrac{\frac{2}{\cancel{3}}}{\frac{1}{\cancel{3}}} = 32$ εργάτες.

24.



$\overset{\triangle}{ΑΔΗ} \underset{πυθαγ.}{\xRightarrow{ορθογ}} ΑΗ^2 = ΑΔ^2 + ΔΗ^2 = (4α)^2 + (3α)^2 = 16α^2 + 9α^2 = 25α^2$, $\boxed{ΑΗ = 5α}$

ισχύει: $(ΑΒΓΔ) = (ΑΔΗ) + (ΑΕΓΗ) + (ΕΒΓ)$ άρα:

$(4α)^2 = \dfrac{\overset{2}{\cancel{4}}α \cdot 3α}{\underset{1}{\cancel{2}}} + (ΑΕΓΗ) + \dfrac{\overset{2}{\cancel{4}}α \cdot 3α}{\underset{1}{\cancel{2}}}$, $16α^2 = 6α^2 + (ΑΕΓΗ) + 6α^2$,

$(ΑΕΓΗ) = 16α^2 - 12α^2$, $ΑΗ \cdot ΚΛ = 4α^2$, $5α \cdot ΚΛ = 4α^2$,

$ΚΛ = \dfrac{4α^2}{5α}$, $\boxed{ΚΛ = \dfrac{4}{5}α}$ άρα $(ΙΚΛΜ) = \left(\dfrac{4}{5}α\right)^2 \Rightarrow$

$\boxed{(ΙΚΛΜ) = \dfrac{16}{25}α^2 \text{ τ.μ.}}$