ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:

1. $A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008:4 + (3^3 - 5^2)\cdot 249 - 10^4 = 16\cdot 625 + 502 + (27-25)\cdot 249 - 10000 =$

$= \cancel{10.000} + 502 + 2\cdot 249 - \cancel{10000} = 502 + 498 = 1.000$

2. α. Ay διχοτόμος της $Γ\hat{A}x \Rightarrow x\hat{A}y = y\hat{A}Γ$

όμως $Γ\hat{A}x = 180^\circ - B\hat{A}Γ = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$ $\Big\} \Rightarrow x\hat{A}y = y\hat{A}Γ = 59^\circ$

αλλά $Ay /\!/ BΓ \Rightarrow \Big\{$ $Γ\hat{B}A = x\hat{A}y$ (εντός εκτός και επί τ' αυτά) $\Rightarrow Γ\hat{B}A = 59^\circ$

$A\hat{Γ}B = y\hat{A}Γ$ (εντός εναλλάξ) $\Rightarrow A\hat{Γ}B = 59^\circ$

β. Επειδή $AB = AΔ$, το $\overset{\triangle}{BAΔ}$ ισοσκελές, άρα $A\hat{B}Δ = A\hat{Δ}B$

Επίσης $AΔ /\!/ BΓ \Rightarrow A\hat{Δ}B = Δ\hat{B}Γ$ $\Big\} \Rightarrow A\hat{B}Δ = Δ\hat{B}Γ$, δηλ. η BΔ διχοτόμος της $A\hat{B}Γ$.

3. $\frac{21}{5} < \frac{42}{α} < \frac{21}{4}$, $\frac{21\cdot 2}{5\cdot 2} < \frac{42}{α} < \frac{21\cdot 2}{4\cdot 2}$, $\frac{42}{10} < \frac{42}{α} < \frac{42}{8}$
ο α είναι ακέραιος $\Big\} \Rightarrow α = 9$

Επομένως $A = α + 5(4+α) + 3(α-4) + 1919 = 9 + 5(4+9) + 3\cdot(9-4) + 1919 = 9 + 5\cdot 13 + 3\cdot 5 + 1919 =$

$= 9 + 65 + 15 + 1919 = 2008$

4. Ο αριθμός των αγοριών που κάνουν παρέλαση είναι πολλαπλάσιο του 3 δηλ. μπορεί να είναι 3, 6, 9, 12, …, 99, 102, 105, 108, …. 198

Επειδή περισσεύουν 3 αν παραταχθούν σε πεντάδες ή επτάδες θα έχουμε:

8, 13, 18, … 103, 108, 113, …, 198, ή 10, 17, 24, …, 73, 80, 87, 94, 101, 108, 115, …

άρα τα αγόρια πρέπει να είναι 108 που θα λάβουν μέρος στην παρέλαση.

Αν x είναι όλα τα αγόρια του σχολείου θα έχουμε: $\frac{60}{100}\cdot x = 108$, $x = 108 : \frac{60}{100}$,

$x = 108 \cdot \frac{10\cancel{0}}{6\cancel{0}}$, $\boxed{x = 180 \text{ αγόρια}}$ Επειδή το 80% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό του 60% των αγοριών, πρέπει τα κορίτσια που θα πάρουν μέρος στην παρέλαση να είναι $2\cdot 108 = 216$

Αν y είναι όλα τα κορίτσια του σχολείου θα έχουμε: $\frac{80}{100}\cdot y = 216$, $x = 216 : \frac{80}{100}$

$y = 216 \cdot \frac{10\cancel{0}}{8\cancel{0}}$, $\boxed{y = 270 \text{ κορίτσια}}$ και όλο το σχολείο έχει $\boxed{450 \text{ παιδιά.}}$

5. $α = 4 - 2\frac{1}{5} = 4 - \frac{11}{5} = \frac{20}{5} - \frac{11}{5} = \frac{9}{5}$, $β = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2} = 5 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = 5 - \frac{8}{2} = 5 - 4 = 1$.

$A = \frac{α}{β^{2009}} - β - \frac{1}{5α} = \frac{\frac{9}{5}}{1^{2009}} - 1 - \frac{1}{\cancel{5}\cdot\frac{9}{\cancel{5}}} = \frac{\frac{9}{5}}{1} - 1 - \frac{1}{9} = \frac{9}{5} - 1 - \frac{1}{9} = \frac{81 - 45 - 5}{45} = \frac{81-50}{45} = \frac{31}{45}$

6. α θετικός ακέραιος που διαιρούμε με το 4, τότε ο α μπορεί να είναι:

i) $α = 4κ$ ή $α = 4κ+1$ ή $α = 4κ+2$ ή $α = 4κ+3$, όπου κ μη αρνητικός ακέραιος

ii) $\begin{array}{c|c} \alpha & 4 \\ \hline 1 & \kappa \end{array}$ άρα $\alpha = 4\kappa+1$ και επειδή ανάμεσα στο 39 και το 50 πρέπει $39<\alpha<50$,

$39<4\kappa+1<50$, $39-1<4\kappa+1-1<50-1$, $38<4\kappa<49$, $\frac{38}{4}<\kappa<\frac{49}{4}$, $9,\ldots<\kappa<12,\ldots$

άρα ο $\kappa = 10, 11$ ή 12 Επομένως ο α θα είναι $\alpha = 4\cdot10+1=41$, $\alpha=4\cdot11+1=45$, $\alpha=4\cdot12+1=49$ δηλ. $\alpha = 41$ ή 45 ή 49

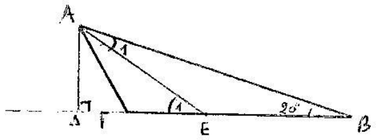
7. α) $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ$, $\hat{A}+140^\circ=180^\circ$, $\hat{A}=180^\circ-140^\circ$, $\boxed{\hat{A}=40^\circ}$

οι γωνίες $\hat{B},\hat{\Gamma}$ είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1 και 6 αντίστοιχα, θα έχουμε:

$\frac{\hat{B}}{1}=\frac{\hat{\Gamma}}{6} \Rightarrow \frac{\hat{B}}{1}=\frac{\hat{\Gamma}}{6}=\frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{1+6}=\frac{140^\circ}{7}=20^\circ$ άρα $\frac{\hat{B}}{1}=20^\circ$, $\boxed{\hat{B}=20^\circ}$

$\frac{\hat{\Gamma}}{6}=20^\circ$, $\boxed{\hat{\Gamma}=120^\circ}$

β)



Επειδή ΑΕ διχοτόμος της $\hat{A}$, θα είναι $\hat{A}_1=20^\circ$

Στο $\overset{\triangle}{AEB}$ έχουμε: $A\hat{E}B+\hat{A}_1+\hat{B}=180^\circ$, $A\hat{E}B+20^\circ+20^\circ=180^\circ$,

$A\hat{E}B=180^\circ-40^\circ$, $A\hat{E}B=140^\circ$, άρα $\hat{E}_1=180^\circ-140^\circ=40^\circ$.

Στο $\overset{\triangle}{A\Delta E}$ έχουμε: $\Delta\hat{A}E+\hat{\Delta}+\hat{E}_1=180^\circ$,

$\Delta\hat{A}E+90^\circ+40^\circ=180^\circ$, $\Delta\hat{A}E=180^\circ-130^\circ$, $\boxed{\Delta\hat{A}E=50^\circ}$

8. α. το $\overset{10}{\frac{1}{4}}+\overset{8}{\frac{1}{5}}+\overset{5}{\frac{1}{8}}=\frac{10+8+5}{40}=\frac{23}{40}$. Στα $\frac{23}{40}$ των μαθητών του γυμνασίου έχουν υπολογιστεί 2 φορές οι 12 μαθητές που κάνουν και μπάσκετ και βόλεϊ άρα οι υπόλοιποι μαθητές που δεν ασχολούνται δηλ. τα $\frac{17}{40}$ των μαθητών δεν είναι 80 αλλά $80-12=68$. άρα $\frac{17}{40}$ των μαθητών είναι 68 μαθητές

το $\frac{1}{40}$ —"— —"— $68:17=4$

άρα τα $\frac{40}{40}$ —"— —"— $4\cdot40=160$

δηλ. το Γυμνάσιο έχει 160 μαθητές.

β. Μόνο μπάσκετ ασχολούνται τα: $160\cdot\frac{1}{5}-12=32-12=20$ μαθητές.

9. α. $x=3^2-4\cdot2^3:4+2^5=9-4\cdot8:4+32=9-8+32=33$

$y=4\cdot5^2-4^3+7\cdot3^2=4\cdot25-64+7\cdot9=100-64+63=99$.

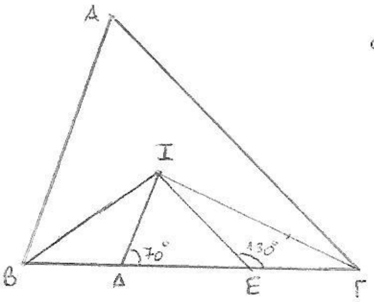
β) Ζητάμε τον $\text{Μ.Κ.Δ}(x,y)=\text{Μ.Κ.Δ}(33,99)=33$

10. $\beta=\text{Μ.Κ.Δ}(16,32,248)=8$, άρα $\begin{array}{c|c} \alpha & 8 \\ \hline \upsilon & 6 \end{array} \Rightarrow \alpha=48+\upsilon$, $\upsilon=0,1,2,3,4,5,6,7$

$\alpha=48+1=49$ είναι ο αριθμός,

γιατί οι άλλοι αριθμοί $\alpha=48,50,51,52,53,54,55$ δεν είναι πολλαπλάσια του 7.

11.



α) Επειδή ΙΔ//ΑΒ, $\hat{AB\Gamma} = \hat{I\Delta\Gamma} = 70°$ (εντός εκτός και επί τ' αυτά)
-//- ΙΕ//ΑΓ, $\hat{A\Gamma B} + \hat{IE\Gamma} = 180°$ (εντός και επί τ' αυτά), άρα $\hat{A\Gamma B} = 180° - 130° = 50°$

Επομένως $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$, $\hat{A} + 70° + 50° = 180°$, $\hat{A} = 180° - 120°$ άρα $\hat{A} = 60°$.

β) Επειδή ΙΔ//ΑΒ, $\hat{BI\Delta} = \hat{ABI} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{70°}{2} = 35°$ (εντός εναλλάξ)
Επειδή ΙΕ//ΑΓ, $\hat{EI\Gamma} = \hat{I\Gamma A} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{50°}{2} = 25°$ (εντός εναλλάξ)

12. α. Όταν όλα τα ελαιόδενδρα παράγουν τα ίδια κιλά λάδι, τότε τα $80+120=200$ ελαιόδενδρα παράγουν 2600 kg λάδι. Άρα το κάθε δένδρο παράγει $2600:200 = 13$ kg λάδι. άρα το μισθωμένο κτήμα παράγει $120\cdot 13 = 1560$ kg λάδι, επομένως ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος θα πάρει $\frac{10}{100}\cdot 1560 = \underline{156 \text{ kg λάδι}}$

β. Αν τα ελαιόδενδρα του αγρότη παράγουν x kg λάδι το καθένα, τότε τα ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος θα παράγουν $\frac{150}{100}x = \frac{3x}{2}$ kg λάδι. όλο το λάδι είναι 2600kg, άρα έχουμε: $80\cdot x + 120\cdot\frac{3x}{2} = 2600$,
$160x + 360x = 5200$, $520x = 5200$, $x = \frac{5200}{520}$, $x = 10$
άρα τα ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος θα παράγουν το καθένα $\frac{3\cdot 10}{2} = 15$ kg λάδι
Επομένως συνολικά: $120\cdot 15 = 1800$ kg λάδι, άρα ο ιδιοκτήτης θα πάρει $\frac{10}{100}\cdot 1800 = 180$ kg λάδι.

13. $A = (200:8+12\cdot 100) + [200:(8+2)+762]\cdot\left[(-1)^{13}+(-1)^{12}+(-1)^{2007}\right]^2 = 25+1200+(20+762)\cdot(-1+1-1)^2 =$
$= 1225 + 782\cdot(-1)^2 = 1225 + 782\cdot(+1) = 1225 + 782 = 2007$

14.

6	8	10	2
3	4	5	2
3	2	5	2
3	1	5	3
1	1	5	5
1	1	1	

ΕΚΠ$(6,8,10) = 120$, Επειδή περισσεύει κανένας όταν παρατάσσονται σε 6άδες, σε 8άδες και 10άδες, θα πρέπει ο αριθμός των μαθητών να είναι πολλαπλάσιο του ΕΚΠ, δηλ. της μορφής $120κ$ άρα $300 < 120κ < 400$, $\frac{300}{120} < κ < \frac{400}{120}$, $2,\ldots < κ < 3,\ldots$ κ ακέραιοι $\Rightarrow$
$κ = 3$, άρα Σύνολο μαθητών $120\cdot 3 = 360$ μαθητές.

Έχουμε: $\frac{A}{5} = \frac{B}{4} = \frac{\Gamma}{3} = \lambda$, άρα $\left.\begin{array}{l} A = 5\lambda \\ B = 4\lambda \\ \Gamma = 3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{A+B+\Gamma}_{\downarrow} = 5\lambda + 4\lambda + 3\lambda = 12\lambda$
$360 = 12\lambda$, $\lambda = \frac{360}{12} = 30$.

Επομένως
$A = 5\cdot 30 = 150$
$B = 4\cdot 30 = 120$
$\Gamma = 3\cdot 30 = 90$

15. Κόστος = $200 \cdot 3 = 600$ €

Απώλεια: $\frac{10}{100} \cdot 200 = 20$ kg, άρα έμειναν 180 kg φράουλες.

$\frac{20}{100} \cdot 600 = 120$ €, άρα πρέπει να εισπράξει $600 + 120 = 720$ € πουλώντας τις φράουλες

άρα πρέπει να πουλήσει: $720 : 180 = 4$ €/kg τις φράουλες

16. α) $(ΑΒΓΔ) = \frac{ΑΔ+ΒΓ}{2} \cdot ΑΕ = \frac{ΑΔ+2ΑΔ}{2} \cdot ΑΕ = \frac{3ΑΔ}{2} \cdot ΑΕ = 3 \cdot \frac{1}{2} ΑΔ \cdot ΑΕ = 3 \cdot (ΑΒΔ)$

άρα: $3 \cdot (ΑΒΔ) = 300 \text{ cm}^2$, $(ΑΒΔ) = 100 \text{ cm}^2$. Επίσης $ΑΔ \cdot ΑΕ = \frac{2(ΑΒΓΔ)}{3} = \frac{2 \cdot \cancel{300}^{100}}{\cancel{3}}$ $\boxed{ΑΔ \cdot ΑΕ = 200 \text{ cm}^2}$

β) το $\overset{\triangle}{ΒΚΓ}$ είναι το συμμετρικό του $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ως προς ΒΓ. Άρα $(ΑΒΚΓ) = 2 \cdot (ΑΒΓ)$.

$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΒΓ \cdot ΑΕ = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} \cdot ΑΔ \cdot ΑΕ = 200 \text{ cm}^2$, άρα $(ΑΒΚΓ) = 2(ΑΒΓ) = 2 \cdot 200 = \underline{\underline{400 \text{ cm}^2}}$

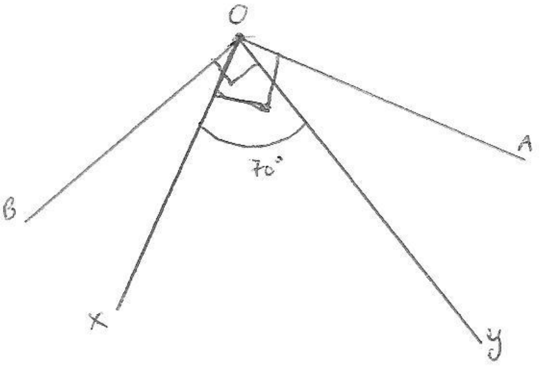
17. $$A = \frac{3 + \frac{4,2}{0,1}}{\left(\frac{1}{0,3} - \frac{7}{3}\right) \cdot 0,3125} = \frac{3 + \frac{42}{1}}{\left(\frac{1}{\frac{3}{10}} - \frac{7}{3}\right) \cdot 0,3125} = \frac{3+42}{\left(\frac{10}{3} - \frac{7}{3}\right) \cdot 0,3125} = \frac{45}{\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} \cdot 0,3125} = \frac{45}{0,3125} = 144$$

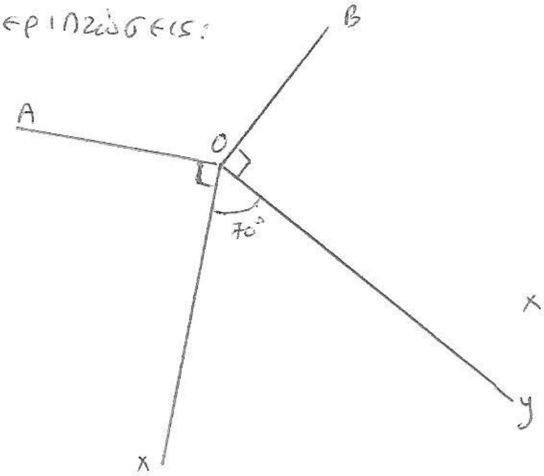
$\frac{3,6}{100} \cdot 144 = 5,184.$

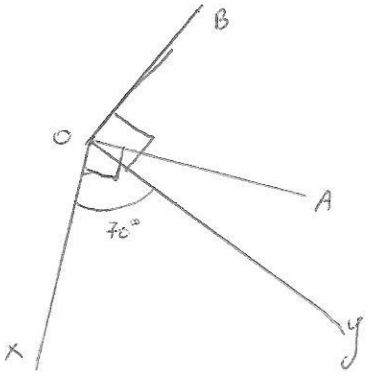
18. Αν x οι εξάδες του πρώτου είδους και y οι εξάδες του δεύτερου είδους, τότε ο Γιώργος θα δώσει: $1,17x + 1,60y$. Τα x και y είναι ακέραιοι. <u>Με δοκιμές</u> βρίσκουμε ότι για $x = 2$ και $y = 11$ θα δώσει τα περισσότερα χρήματα δηλ. 19,94 € και θα πάρει τα λιγότερα ρέστα 6 λεπτά.

19. Επειδή $45 = 5 \cdot 9$, πρέπει ο αριθμός $6x12y$ να διαιρείται με το 5 και με το 9.
Για να διαιρείται με το 5 πρέπει $y = 0$ ή $y = 5$, άρα είναι της μορφής:
i) $6x120$, για να διαιρείται με το 9 πρέπει $6+x+1+2+0 = 9+x$ πολ. του 9 δηλ. $\begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x = 9 \end{cases}$
ή
ii) $6x125$, —''— —''— —''— —''— $6+x+1+2+5 = 14+x$ —''— δηλ. $x = 4$.
άρα οι αριθμοί είναι: 60120, 69120, 64125

20. Υπάρχουν οι παρακάτω περιπτώσεις:







$x\hat{O}y + y\hat{O}A = 90^\circ$, $70^\circ + y\hat{O}A = 90^\circ$, $y\hat{O}A = 20^\circ$

$x\hat{O}y + x\hat{O}B = 90^\circ$, $70^\circ + x\hat{O}B = 90^\circ$, $x\hat{O}B = 20^\circ$

$A\hat{O}B = x\hat{O}B + x\hat{O}y + y\hat{O}A = 20^\circ + 70^\circ + 20^\circ = 110^\circ$

$y\hat{O}A = 70^\circ + 90^\circ = 160^\circ$

$B\hat{O}x = 70^\circ + 90^\circ = 160^\circ$

$A\hat{O}B = 90^\circ + 70^\circ + 90^\circ = 250^\circ$

ή

$A\hat{O}B = 110^\circ$

$y\hat{O}A + x\hat{O}y = 90^\circ$

$y\hat{O}A + 70^\circ = 90^\circ$

$y\hat{O}A = 20^\circ$

$B\hat{O}x = x\hat{O}y + y\hat{O}B = 70^\circ + 90^\circ = 160^\circ$

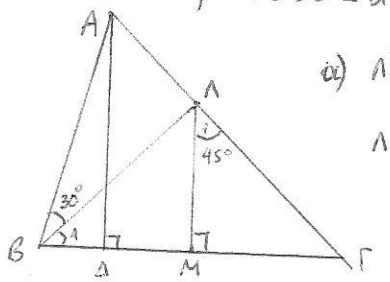
$A\hat{O}B = x\hat{O}B - x\hat{O}A = 160^\circ - 90^\circ = 70^\circ$

21. $A = 2^3 \cdot 5^3 + 2004 : 4 + (3^2 - 4) \cdot 100 + 3 = (2 \cdot 5)^3 + 501 + (9 - 4) \cdot 100 + 3 = 10^3 + 501 + 5 \cdot 100 + 3 =$
$= 1000 + 501 + 500 + 3 = 2004$

22. i) Έστω xxxx είναι ο αριθμός, ισχύει: $x + x + x + x = 20$, $4x = 20$, $x = 5$, άρα $K = 5555$

ii) $K = \alpha \cdot 10^\nu$, $5555 = \alpha \cdot 10^\nu = 5{,}555 \cdot 10^3$, άρα $\alpha = 5{,}555$ και $\nu = 3$

23.



α) $\Lambda\hat{M}\Gamma \xrightarrow[\Lambda_1 = 45^\circ]{\text{ορθογ.}} \hat{\Gamma} = 45^\circ$

ΛΜ μεσο⊥ της ΒΓ, άρα $\overset{\triangle}{B\Lambda\Gamma}$ ισοσκελές άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma} = 45^\circ \Rightarrow A\hat{B}\Gamma = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$

$\overset{\triangle}{AB\Gamma} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$, $\hat{A} + 75^\circ + 45^\circ = 180^\circ$, $\hat{A} + 120^\circ = 180^\circ$,
$\hat{A} = 180^\circ - 120^\circ$, $\hat{A} = 60^\circ$.

β) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot (\cancel{2}M\Gamma) \cdot A\Delta = 5 \cdot A\Delta$, $35 = 5A\Delta$, $A\Delta = \frac{35}{5}$, $\boxed{A\Delta = 7cm}$

24. α) $54{,}4 - 32 = 22{,}4$, άρα $\frac{22{,}4}{32} \cdot 100 = \frac{2240}{32} = 70$, άρα 70%

β) $\frac{4\cancel{0}}{10\cancel{0}} \cdot 32 = 12{,}8$, άρα $32 + 12{,}8 = 44{,}8$, επομένως $54{,}4 - 44{,}8 = 9{,}6$ το βαρέλι.